$\boxed{1}$(2012 札幌医大 一部略)

全ての面が合同な三角形である四面体 OABC を考える。
この四面体について，OA$=\sqrt{3}$，OB$=2$，OC$=\sqrt{5}$ とする。
(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ をそれぞれ求めよ。
(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。

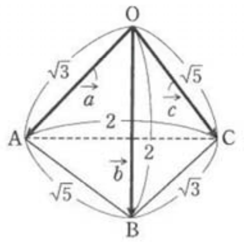
解説

(1) 全ての面が，辺の長さが，$\sqrt{3}$，2，$\sqrt{5}$ の三角形である。
AB$=\sqrt{5}$，BC$=\sqrt{3}$，CA$=2$ で，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと，

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$ より，$5=4+3-2\vec{a}\cdot\vec{b}$
$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2$ より，$3=5+4-2\vec{b}\cdot\vec{c}$
$\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{b}\cdot\vec{c}=3$

$|\overrightarrow{CA}|^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2$ より，$4=3+5-2\vec{c}\cdot\vec{a}$
$\therefore \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2$



(2) C から平面 OAB に垂線 CH を下ろすと，
（O から平面 ABC に下ろすと計算が大変になってしまうから）
$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおける。

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}$ より，　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$
$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$
$3s+t-2=0$　…①

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$ より，　$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0$
$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$
$s+4t-3=0$　…②

①，②より，$s=\dfrac{5}{11}$，$t=\dfrac{7}{11}$

よって，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{5}{11}\vec{a}+\dfrac{7}{11}\vec{b}$ より，

$$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=\frac{5}{11}\vec{a}+\frac{7}{11}\vec{b}-\vec{c}=\frac{1}{11}(5\vec{a}+7\vec{b}-11\vec{c})$$ である。

ここで，

$$|5\vec{a}+7\vec{b}-11\vec{c}|^2$$
$$=25|\vec{a}|^2+49|\vec{b}|^2+121|\vec{c}|^2+2\times5\times7\times\vec{a}\cdot\vec{b}-2\times7\times11\times\vec{b}\cdot\vec{c}-2\times11\times5\times\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$=25\cdot3+49\cdot4+121\cdot5+70\cdot1-154\cdot3-110\cdot2$$
$$=264$$ より

$|\overrightarrow{CH}|^2=\left(\dfrac{1}{11}\right)^2\times264$　であり，$|\overrightarrow{CH}|\geqq0$ より，$|\overrightarrow{CH}|=\dfrac{1}{11}\sqrt{264}=\dfrac{2}{11}\sqrt{66}$

また，△OABの面積は，

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3\times4-1}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

したがって，四面体 OABC の体積をVとすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{2}{11}\sqrt{66}=\frac{1\cdot\sqrt{11}\cdot2\sqrt{11\cdot6}}{3\cdot2\cdot11}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\boxed{2}$(左の問題を，簡単にするために改題≒解き易くしたら…)

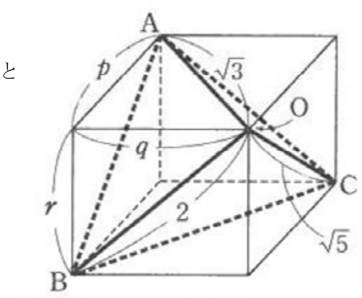
全ての面が合同な三角形である四面体 OABC を考える。
この四面体について，OA$=\sqrt{3}$，OB$=2$，OC$=\sqrt{5}$ とする。
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおき，次の問に答えよ。
(1) 作図せよ。
(2) AB，BC，CA の長さを答えよ。
(3) $|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$ を利用して，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ つまり，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。
　また，同様にして，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ をそれぞれ求めよ。
(4) C から平面 OAB に垂線 CH を下ろし，点 H を定める。
　そのとき，$\overrightarrow{OH}$ を$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。
(5) (4)を利用して，$\overrightarrow{CH}$ を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。
(6) (5)を利用して，$|\overrightarrow{CH}|$ を求めよ。
(7) △OAB の面積を求めよ。
(8) (6)(7)を利用して，四面体 OABC の体積を求めよ。

解説

(8)の求め方は，左のようにもできるが，次のような別解がある。
　等面四面体の基本性質を利用している。
　（等面四面体＝４つの面全てが合同な立体）

【解】

この立体は，右図のように，
直方体（各面が長方形）に，ぴったりとはめ込むことができる。



つまり，右図のように，直方体の
各辺を，p，q，r とし，
四面体 OABC の体積を V とすると，

$$V=pqr-\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}pq\cdot r\right)\times4$$
$$=\frac{1}{3}pqr\quad\cdots①$$

である

ここで，三平方の定理より
$p^2+q^2=(\sqrt{3})^2$　，$q^2+r^2=2^2$　，$r^2+p^2=(\sqrt{5})^2$　が成り立つので，
$p^2=2$，$q^2=1$，$r^2=3$　であり，$p>0$，$q>0$，$r>0$ より
$p=\sqrt{2}$，$q=1$，$r=\sqrt{3}$ が分かる。
よって求める四面体 OABC の体積 V は，①より

$$V=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

（四面体OABCの体積は，以上のように非常に簡単に求まる。これは，等面四面体の基本性質であり，等面四面体を見たら，直方体を想像できるようにして欲しい。左のように，ある面に対して垂直なベクトルの大きさを求めて，四面体の体積は，$\dfrac{1}{3}\times$(底面積)の公式で，直接的に求めることも重要な意味を持つが，図形的性質をうまく利用すると，こんなにも簡単に解くことができるという見本のような問題である。）