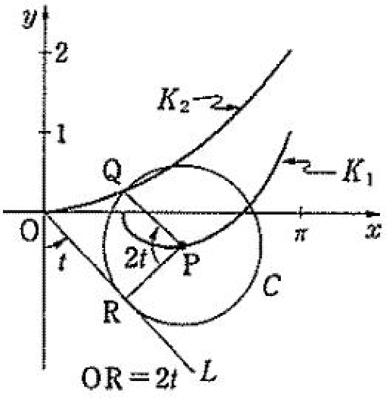
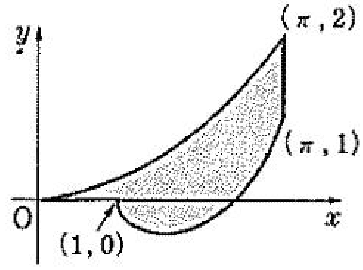
東北大学　1999年(平成11年)後期　　パラメータ表示の積分による面積

【問題】

原点を中心として回転する半直線LとLに接しながら動く半径1の円Cがある。時刻$t=0$では，半直線Lはy軸の負の部分に一致しており，円Cは中心が$(1,0)$にあって原点でLに接しているとする。時刻tでは，半直線Lは原点を中心に正の向きにtだけ回転し，CはL上を滑らずにころがって原点から$2t$の距離の点RでLに接しているとする。円の中心をPとする。点QはCの周上の定点で$t=0$では原点にあるとする。





(1)　時刻tでのPとQの座標を媒介変数tで表せ。

(2)　tが0から$\dfrac{\pi}{2}$まで動くときのPの軌跡をK_1とし，Qの軌跡をK_2とする。$(0,0)$と$(1,0)$を結ぶ線分，$(\pi,1)$と$(\pi,2)$を結ぶ線分およびK_1とK_2で囲まれる部分の面積を求めよ。

【テーマ】・回転する半直線とその上を転がる円の中心と円周上の点のパラメータ表示
（動く半直線上を転がるため，単なるx軸上に描かれるサイクロイドよりも難しい。）
・上記によって描く曲線に囲まれる部分の面積
（領域が図示されている。定積分の利用は推測がつく。）
・ベクトルと媒介変数表示と積分との総合的な知識が必要である。

(1)　【解】

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RP}$であり

$\overrightarrow{OR}=2t(\cos\theta,\sin\theta)$　　$\theta=-\dfrac{\pi}{2}+t$より

$=2t\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}+t\right),\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+t\right)\right)$

$=2t(\sin t,-\cos t)$

$\overrightarrow{RP}=1(\cos t,\sin t)$　より

$\overrightarrow{OP}=2t(\sin t,-\cos t)+(\cos t,\sin t)$

$=(2t\sin t+\cos t,-2t\cos t+\sin t)$

よって，点Pのパラメータ表示は，$\begin{cases}x=2t\sin t+\cos t\\ y=-2t\cos t+\sin t\end{cases}$

また，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$であり，

$\overrightarrow{PQ}=(\cos(\pi-t),\sin(\pi-t))=(-\cos t,\sin t)$だから，

$\overrightarrow{OQ}=(2t\sin t+\cos t,-2t\cos t+\sin t)+(-\cos t,\sin t)$

$=(2t\sin t,-2t\cos t+2\sin t)$

よって，点Qのパラメータ表示は，$\begin{cases}x=2t\sin t\\ y=-2t\cos t+2\sin t\end{cases}$

(2)　【解】

(1)より　点P：$\begin{cases}x_1=2t\sin t+\cos t\\ y_1=-2t\cos t+\sin t\end{cases}$　点Q：$\begin{cases}x_2=2t\sin t\\ y_2=-2t\cos t+2\sin t\end{cases}$　とおくと

求める部分のSは，次の積分で表される。

$S=\int_0^{\pi}y_2dx_2-\int_1^{\pi}y_1dx_1$

x_1	1	→	π
x_2	0	→	π
t	0	→	$\dfrac{\pi}{2}$

なので置換積分して

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}y_2\dfrac{dx_2}{dt}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}y_1\dfrac{dx_1}{dt}dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2t\cos t+2\sin t)(2t\sin t)'dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2t\cos t+\sin t)(2t\sin t+\cos t)'dt$

ここで，$(2t\sin t)'=2\sin t+2t\cos t$，$(2t\sin t+\cos t)'=2\sin t+2t\cos t-\sin t=\sin t+2t\cos t$より，

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\sin^2 t-4t^2\cos^2 t)dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+4t^2\cos^2 t)dt$

$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos 2t}{2}dt=\dfrac{3}{2}\left[t-\dfrac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{3}{4}\pi$