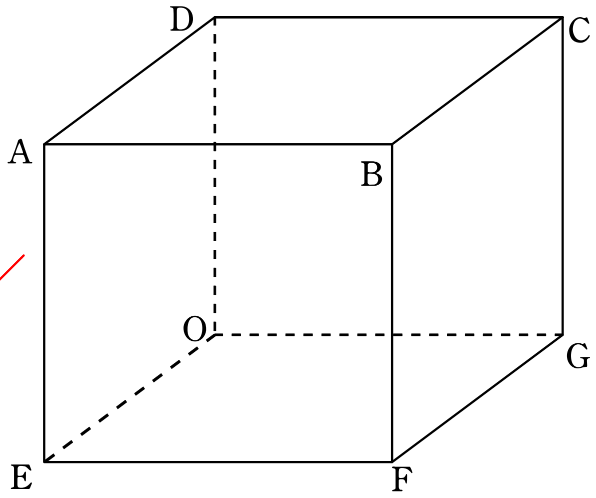
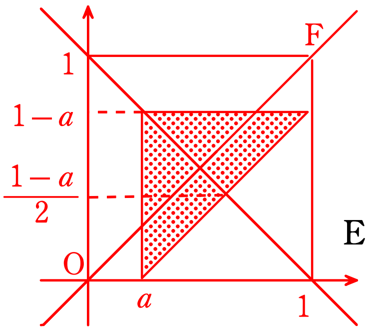
(積分･体積）理系

下図のような，１辺の長さが１の立方体ABCD−EFGHを考え，Aを頂点とし三角形OFGを底面とする三角すいと，Cを頂点とし三角形OFEを底面とする三角すいとの共通部分をKとする。Kの体積を求めよ。



解答　頂点Oを原点と考え，辺OEをx軸上，辺OGをy軸上，辺ODをz軸上にとる。

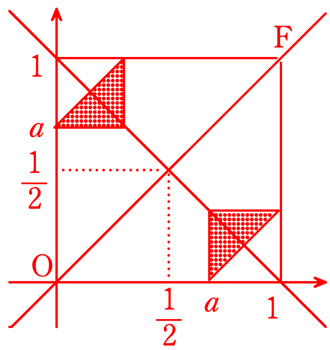
　三角すいA−OFGの，平面$z=a$によるKの切り口をxy平面に正射影すると下図のようになる。



また，三角すいC−OFEの平面$z=a$による切り口の正射影は，これをOFに関して対称移動した直角二等辺三角形である。

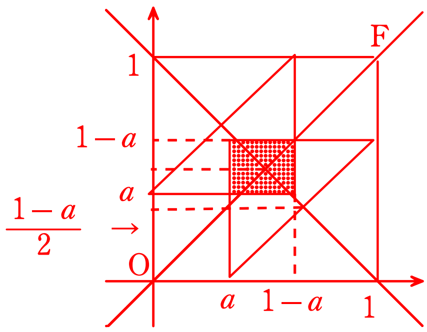
　Kの$z=a$による切り口は，これらの２つの直角二等辺三角形の共通部分であるので次の３つの場合が考えられる。

① $a>\dfrac{1}{2}$のとき，AGとCEの交点のz座標が$z=\dfrac{1}{2}$なので，xy平面にそれぞれ正射影した図は右の図のようになり，共通部分はない。



② $\dfrac{1-a}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$のとき，つまり$\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$のとき

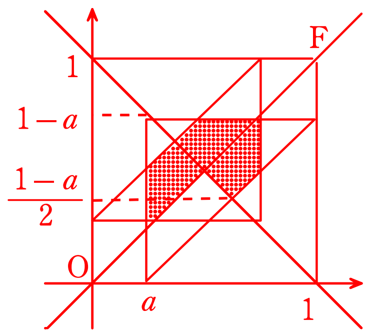
切り口は右図のような正方形（または点）となり，その面積は$(1-2a)^2$



③ $0\leqq a<\dfrac{1-a}{2}$のとき，$0\leqq a<\dfrac{1}{3}$のとき

切り口は右図のような六角形（または線分）となり，その面積は

$(1-2a)^2-(1-3a)^2=-5a^2+2a$



以上①，②，③からKの体積は

$$S=\int_0^{\frac{1}{3}}(-5a^2+2a)da+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}(1-2a)^2\,da$$

$$=\left[-\frac{5}{3}a^3+a^2\right]_0^{\frac{1}{3}}+\left[-\frac{(1-2a)^3}{6}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^2}+0+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{1}{18}\cdots\text{答}$$