鹿児島中央高校　堂薗幸夫　　http://www.synapse.ne.jp/dozono/

宿題
[2]　正数$a$，$b$，$c$ に対して，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqq \frac{c+a}{c+b}+\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a} \quad \cdots\cdots \bigstar$$

【証明】

$\frac{a}{b}=x$，$\frac{b}{c}=y$，$\frac{c}{a}=z$ とおく。$a>0$，$b>0$，$c>0$ より，$x>0$，$y>0$，$z>0$ である。

ここで，$xyz=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=1$ …① が成り立ち，

また，相加相乗平均の関係から，$x+y+z \geqq 3\cdot\sqrt[3]{xyz}=3$ …② である。

更に，$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$ より，$xy=\frac{1}{z}$，同様に $yz=\frac{1}{x}$，$zx=\frac{1}{y}$ …③　も成り立つ。

証明すべき★式の，(左辺)$=x+y+z$

証明すべき★式の，(右辺)$=\dfrac{1+\frac{a}{c}}{1+\frac{b}{c}}+\dfrac{1+\frac{b}{a}}{1+\frac{c}{a}}+\dfrac{1+\frac{c}{b}}{1+\frac{a}{b}}$

$$=\frac{1+\frac{1}{z}}{1+y}+\frac{1+\frac{1}{x}}{1+z}+\frac{1+\frac{1}{y}}{1+x}$$

$$=\frac{1+xy}{1+y}+\frac{1+yz}{1+z}+\frac{1+zx}{1+x} \quad (\because ③より)$$

$$=x+\frac{1-x}{1+y}+y+\frac{1-y}{1+z}+z+\frac{1-z}{1+x} \quad となり，$$

以上より，★式は，$x+y+z \geqq x+y+z+\frac{1-x}{1+y}+\frac{1-y}{1+z}+\frac{1-z}{1+x}$ と変形され，

$$\frac{z-1}{x+1}+\frac{x-1}{y+1}+\frac{y-1}{z+1} \geqq 0 \quad \cdots\cdots ☆ \quad を示せばよいことになる。$$

分母を払い，$(z-1)(y+1)(z+1)+(x-1)(x+1)(z+1)+(y-1)(x+1)(y+1) \geqq 0$

つまり，　$(y+1)(z^2-1)+(z+1)(x^2-1)+(x+1)(y^2-1) \geqq 0$

$yz^2-y+z^2-1+zx^2-z+x^2-1+xy^2-x+y^2-1 \geqq 0$

$xy^2+yz^2+zx^2+(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)-3 \geqq 0$　……☆☆　を示す。

ここで，相加相乗平均の関係から，$xy^2+yz^2+zx^2 \geqq 3\cdot\sqrt[3]{xy^2\cdot yz^2\cdot zx^2}=3xyz=3$　(∵①より) であるから，

最終的に，★を証明することは，$x^2+y^2+z^2 \geqq x+y+z$ ……☆☆☆　を証明することと同値である。

コーシー・シュワルツの不等式から

$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2$ が成り立つ

つまり，$x^2+y^2+z^2 \geqq \frac{1}{3}(x+y+z)^2=\frac{x+y+z}{3}\cdot(x+y+z) \geqq x+y+z$　(∵②より)

となり，☆☆☆ が示された。つまり，★が示された。（証明終わり）

**【感想】 前回送ったものが，ちょっと技巧的すぎる感じがしましたので，更に改良？してみました。**

**他の先生方は，もっとすっきりとした解答ではないでしょうか？見てみたいです。**