

宿題

[2] $\triangle ABC$ において、 $AC=2AB$ であるとき、各辺上に外向きに正方形 $ABQH$ 、 $ACEF$ 、 $BCDR$ を作り、次に FH を1辺とする正方形 $FHPG$ を外向きに作ると、3点 P 、 Q 、 R は同一直線上にあることを示せ。

【証明】 下図のように、 AB を実軸に、 AH を虚軸に複素数平面を考える。

A を原点に、 B を $(1, 0)$ つまり $1+0i$ とし、 $\angle CAB=\alpha$ とおく。

題意より、 $C(2\cos\alpha + 2i\sin\alpha)$ となり、

C を B 中心に $-\frac{\pi}{2}$ 回転し、 R の座標

$R(2\sin\alpha + 1, -2\cos\alpha + 1)$ を得る。

また、 C を A 中心に $\frac{\pi}{2}$ 回転した F を

更に、 H を中心に $\frac{\pi}{2}$ 回転し、 P の座標

$P(-2\cos\alpha - 1, -2\sin\alpha - 1)$ を得る。

また、 $Q(1, -1)$ より、

$$\overrightarrow{RQ} = (2\sin\alpha, 2\cos\alpha - 2)$$

$$\overrightarrow{QP} = (-2\cos\alpha - 2, -2\sin\alpha)$$

であるので、

$$k = \frac{-2\cos\alpha - 2}{2\sin\alpha} \text{ とおくと、}$$

$\overrightarrow{QP} = k\overrightarrow{RQ}$ が成り立ち、 P 、 Q 、 R は一直線上にあることが示された。(証明終わり)

【感想】

昨日(10/5)の教材研究会で、複素数平面に関する講義をいただきました。ありがとうございました。そのお礼(?)として、複素数の回転でゴリゴリ計算して解きました。…なんてホントは初等幾何的に、たぶんどっかに円があって、シムソンの定理とか、清宮の定理とか使うのかな?と睨みましたが、いかんせん、幾何は苦手で、正方形だし i 回転が楽ちゃんそうだし、和算なんか無視して代数的にやっちゃったところです。ああ、お恥ずかしい。。。。

お詫びに、アニメーションになる一步手前のコマ送り状況を掲載します。

