

宿題 [1] $\triangle ABC$ は鋭角三角形であるとき、次の不等式を証明せよ。

$$\sin A + \sin B > \cos A + \cos B + \cos C$$

【証明】

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= \sin A + \sin B - (\cos A + \cos B + \cos C) \\ &= \sin A + \sin B - \cos A - \cos B - \cos\{180^\circ - (A + B)\} \quad \because A + B + C = 180^\circ \\ &= \sin A + \sin B - \cos A - \cos B + \cos(A + B) \\ &= \sin A + \sin B - \cos A - \cos B + \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ &= (1 - \cos A - \cos B + \cos A \cos B) - (1 - \sin A - \sin B + \sin A \sin B) \\ &\quad \text{ここで, } 0 < \sin \theta, \cos \theta < 1 \text{ (} \theta = A, B, C \text{) であるから,} \\ &= (1 - \cos A)(1 - \cos B) - (1 - \sin A)(1 - \sin B) \quad \cdots \cdots \star \end{aligned}$$

ここで, $\triangle ABC$ は, 鋭角三角形より, $0^\circ < A, B, C < 90^\circ$ と

$$0^\circ < 180^\circ - (A + B) < 90^\circ$$

$$-180^\circ < -(A + B) < -90^\circ$$

$$90^\circ < A + B < 180^\circ \text{ から,}$$

(i) $0^\circ < 90^\circ - B < A < 90^\circ$ と (ii) $0^\circ < 90^\circ - A < B < 90^\circ$ を得る。 $y = \sin x$ は, $0^\circ < x < 90^\circ$ では単調増加だから,

(i)のとき, $0 < \sin(90^\circ - B) < \sin A < 1$ (ii)のとき, $0 < \sin(90^\circ - A) < \sin B < 1$

$$0 < \cos B < \sin A < 1$$

$$0 < \cos A < \sin B < 1$$

$$1 > 1 - \cos B > 1 - \sin A > 0 \text{ であり,}$$

$$1 > 1 - \cos A > 1 - \sin B > 0 \text{ である。}$$

これらの辺々を掛け合わせると, $(1 - \cos A)(1 - \cos B) > (1 - \sin A)(1 - \sin B)$ を得て,

$\star$ の, $(\text{左辺}) - (\text{右辺}) > 0$ が成り立つ。

(証明終わり)

【感想】

先日(11/22)の数学科懇親会では楽しく過ごすことが出来ました。ありがとうございました。その際にお話しましたが、私には、なかなか手ごわい問題でした。非対称というのは、何か意味があるのか、 $\sin$ と $\cos$ の組み合わせを変えてみたり、試行錯誤しているうちになんとか見えてきた感じです。下部分が余りましたので、今回の証明をするために、 $\triangle ABC$ で他にこんなことを得ました、と列挙しておきたいと思います。皆様方もきつとこの辺りを彷徨った(?)のではないのでしょうか？では、良いお年を！

- ~~~~~
- ・ $\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C$
 - ・ $\sin A + \sin B + \sin C < 2(\cos A + \cos B + \cos C)$
 - ・ $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
 - ・ $\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$
 - ・ $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$
 - ・ $2 < \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
 - ・ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

なんだか、 $\triangle ABC$ って変わった特性をいろいろもってるんですね～！改めて感心しました。

【おまけ】 面白いものを見つけました。 $\frac{\pi^9}{e^8}$ を数値実験してみてください。不思議ですね～。